数理解析研究所講究録
622巻 1987年 54-72

葉層構造とWeilコホモロジー類

北大理　鈴木治夫　(Haruo Suzuki)

C^∞－多様体M上のC^2－葉層構造$\mathcal{F}$に対し，"葉成分"de Rhamコホモロジー群の元は$\mathcal{F}$の定義イデアルをde Rham コチェイン複体の部分複体とみて得られるコホモロジー群から，Mのde Rham コホモロジー群への準同形写像を定める。
J. Heitsch と S. Hurder [HH] によるWeil作用素は，このような"葉成分"de Rham コホモロジー群の元の一つとみなすことができる。

まずWeil測度に基づく，S. Hurder と A. Katok [HK]による葉層2次特性類の自明性に関する結果を説明し，ついで葉層ホロノミー亜群における横断測度のモジュラ・コホモロジー類の一般化として，Weil作用素に対応するホロノミー亜群のコホモロジー類を構成する。　§1 はWeilコホモロジー類の構成，§2 は Weil測度の説明，§3 は葉層構造の軟化(tempered)コサイクルと柔順性(amenability)の概念の導入によるWeil測度の消滅定理であり，I形葉層構造に対する次元差的

(redidual) 2次特性類の自明性を導びく。　§4は高次元モジュラ・コホモロジー類の構成に当てる。

§1．Weilコホモロジー類

Mをn次元閉Hausdorff C^∞-多様体，$(M,\mathcal{F})$を余次元qのC^2-葉層構造とする。　$A(M)$をMのde Rham複体，$A(M,\mathcal{F}) \subset A(M)$を$\mathcal{F}$の定義イデアルとする。　$\mathcal{F}$の積分可能性によって，$A(M,\mathcal{F})$は外微分作用素dに関して閉じており，したがって$A(M)$の部分複体となる。　$H^\cdot_{DR}(M)$，$H^\cdot(M,\mathcal{F})$をそれぞれMのde Rhamコホモロジー群，$A(M,\mathcal{F})$のコホモロジー群とする。　M上に一つのRiemann計量をとることにより，接ベクトル束$T(M)$は$\mathcal{F}$の葉に接する部分ベクトル束$T(\mathcal{F})$とその法ベクトル束$V(\mathcal{F})$とのWhitney和$T(M)=T(\mathcal{F})\oplus V(\mathcal{F})$に分解し，$A(M)$の微分形式は2重次数をもつが，その葉方向の外微分を$d_\mathcal{F}$とすると$d_\mathcal{F}\circ d_\mathcal{F}=0$がいえる。　この$d_\mathcal{F}$に関する，横断次数0，葉次数$s$のコホモロジー群を$H^{0,s}_{\mathcal{F}DR}(M)$とかき，$(M,\mathcal{F})$の<u>次数$(0,s)$</u>の<u>"葉成分"</u>または<u>葉層de Rhamコホモロジー群</u>とよぶ。　鈴木$[S_1, S_2]$により，準同形写像$\chi: H^{0,s}_{\mathcal{F}DR}(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^\cdot(A,\mathcal{F}), H^{\cdot+s}_{DR}(M))$が，$[z]\in H^{0,s}_{\mathcal{F}DR}(M)$，$[\varphi]\in H^\cdot(A,\mathcal{F})$に対して，

$$(\chi([z]))([\varphi]) = [z\wedge\varphi]$$

で与えられる。

θ^b, θ^rをそれぞれ$V(\mathcal{F})$上のBott接続，Riemann接続とするとき，$\theta = t\theta^b + (1-t)\theta^r$ $(t \in \mathbb{R})$は$V(\mathcal{F}) \times \mathbb{R}$上の接続を定める。$\theta$の曲率形式を$\Omega^{br}$，$c_i$を$i$次Chern多項式とし，$i$は内部積を表わすものとして，

$$h_i(\theta^b, \theta^r) = \int_0^1 i(\partial/\partial t) c_i(\Omega^{br})\, dt$$

とおく。θ^b, θ^rの曲率形式をそれぞれΩ^b, Ω^rとかくことにすると，iが奇数のときΩ^rは歪対称であるから$c_i(\Omega^r) \equiv 0$となり，したがって

$$\begin{aligned} d h_i(\theta^b, \theta^r) &= c_i(\Omega^b) - c_i(\Omega^r) \\ &= c_i(\Omega^b) \end{aligned}$$

となる。鈴木[S1]により，iが奇数ならばh_iの$(0, 2i-1)$成分$(h_i)_{0,2i-1}$は$\mathcal{F}$の葉方向の外微分$d_{\mathcal{F}}$に関し閉となり，そのコホモロジー類

$$[(h_i)_{0,2i-1}] \in H^{0,2i-1}_{\mathcal{F}DR}(M)$$

はθ^b, θ^rのとり方によらない。

$I(GL(q;\mathbb{R})) \cong \mathbb{R}[c_1, c_2, \cdots, c_q]$を$GL(q;\mathbb{R})$のリー環$\mathfrak{gl}_q$の随伴不変多項式から成る次数つき環とし，$I(GL(q;\mathbb{R}))_q = I(GL(q;\mathbb{R}))/(\deg > 2q)$とおく。$\Lambda(y_1, y_3, \cdots, y_l)$ $(l = 2[(q+1)/2] - 1)$を$\{y_1, y_3, \cdots, y_l\}$, $\deg y_i = 2i-1$によって生成される次数つき交代多元環とする。微分作用素dをもつ次数つき多元環を

$$WO_q = \Lambda(y_1, y_3, \cdots, y_\ell) \otimes I(GL(q;\mathbb{R}))_q,$$
$$d(y_i \otimes 1) = 1 \otimes c_i,$$
$$d(1 \otimes c_i) = 0$$

によって定める。微分作用素をもつ次数つき多元環の間の準同形写像 $\Delta = \Delta(\theta^b, \theta^\gamma) : WO_q \to A(M)$ を

$$\Delta(y_i \otimes 1) = h_i(\theta^b, \theta^\gamma),$$
$$\Delta(1 \otimes c_i) = c_i(\Omega^b)$$

と定めると，これはコホモロジー準同形写像 $\Delta_* : H^\bullet(WO_q) \to H^\bullet_{DR}(M)$ を引きおこす。Δ_* は θ^b, θ^γ のとり方によらない。$\chi[(h_i)_{0,2i-1}] : H^\bullet(M, \mathcal{F}) \to H^{\bullet+2i-1}_{DR}(M)$ は Weil 作用素 $\chi(y_i)$ と一致するので，$[(h_i)_{0,2i-1}]$ を Weil コホモロジー類と呼ぶことにする。

§2. Weil 測度

$\pi : P \to M$ を法ベクトル束 $V(\mathcal{F})$ の q-枠から成る，主 $GL(q;\mathbb{R})$-束とする。$GL(q;\mathbb{R})$ は P の右から作用する。$V(\mathcal{F})$ 上の C^2-Riemann 計量 γ は C^2-断面写像 $s_\gamma : M \to P/O_q$ を定める。$S(gl_q^*)$ をリー環 gl_q の双対空間 gl_q^* の対称多元環とし，各 $\alpha \in gl_q^*$ を $S(gl_q^*)$ の次数2の元 $\tilde{\alpha}$ とみなす。$S(gl_q^*)_q = S(gl_q^*)/(\deg > 2q)$ とおく。截端(truncated) Weil 多元環とは，微分作用素 d をもつ次数つき多元環 $W(gl_q)_q$ で，

$$W(gl_q)_q = \wedge gl_q^* \otimes S(gl_q^*)_q,$$
$$d = d' + d'',$$
$$d'\alpha = d_\wedge \alpha,$$
$$i(x)d'\tilde{\alpha} = \theta(x)\tilde{\alpha}, \qquad \theta(x) = -(\mathrm{ad}\,x)^*, \qquad \forall x \in gl_q$$
$$d''\alpha = \tilde{\alpha},$$
$$d''\tilde{\alpha} = 0$$

となるものである。 $W(gl_q)_q$ の中で O_q-基底形式，すなわち O_q のリー環 $\mathfrak{o}_q$ の任意の元 x に対し $i(x)$ を施すと 0 になり，O_q の元の随伴変換で不変な形式全体から成る $W(gl_q)_q$ の d-不変部分環を $W(gl_q, O_q)_q$ とかく。 WO_q の $1 \otimes c_i$ を $c_i \in S(gl_q^*)_q$ に対する $1 \otimes c_i$ と同一視し，$y_i \otimes 1$ に対して微分作用素が可換となるように $\tilde{y}_i \in \wedge gl_q^* \otimes S(gl_q^*)_q$ を定めることによって，WO_q は $W(gl_q, O_q)_q$ の部分環と見なすことができ この対応は同形写像

$$H^\cdot(WO_q) \cong H^\cdot(W(gl_q, O_q)_q)$$

をひきおこす。（C. Godbillon [G] 参照。）

$V(\mathcal{F})$ の上の Bott 接続 θ^b は枠束 P 上の接続を定め，したがって微分作用素をもつ次数つき多元環の写像

$$k(\theta^b) : W(gl_q, O_q)_q \to A(P/O_q),$$
$$k(\theta^b)\alpha = \alpha\theta^b,$$
$$k(\theta^b)\tilde{\alpha} = \alpha\Omega^b$$

を定める。 F. Kamber と Ph. Tondeur [KT, 123-125] によれば,

$$\Delta(\theta^b, \theta^r) = ds_r^* \circ k(\theta^b)|WO_q : WO_q \to A(M)$$

となる。 $\tau : W(gl_q, O_q)_q \to \wedge gl_q^*$ を第1因子への射影写像として $\tau_i = \tau(\bar{y}_i)$ とおく。 $k(\theta^b)(S(gl_q^*)) \wedge {}^{q+1}A(M, \mathcal{F}) = 0$ であることから,

$$\begin{aligned} h_i &= ds_r^* \circ k(\theta^b)(\bar{y}_i) \qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F}) \\ &= ds_r^* \circ k(\theta^b)(\tau_i \otimes 1) \qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

となる。 (U, Φ) を局所葉層座標, $s : U \to P|_U$ を局所正規直交 C^2 q-枠場で, s_r のリフトとなるものとする。 L を U における連結葉(plaque)とすると, L は可縮 $\theta^b|L$ は平坦だから, $P|L \cong \mathbb{R}^{n-q} \times GL(q;\mathbb{R})$ で, $GL(q;\mathbb{R})$ の左不変ベクトル場 X および $\mathbb{R}^{n-q} = L$ の座標 y に対して

$$\theta^b(\partial/\partial y, X) = X$$

となる。 s に対し, C^2- 写像 $g : L \to GL(q;\mathbb{R})$ が定まり, $s(y) = (y, g(y))$ と表わされることから,

$$\begin{aligned} \theta^b \circ ds(\partial/\partial y) &= \theta^b(\partial/\partial y, dg(\partial/\partial y|g(y))) \\ &= g(y)^{-1} dg(\partial/\partial y)|g(y) \end{aligned}$$

を得る。 gl_q - 値1次形式 $A_s = g^{-1} d_{\mathcal{F}} g : T(\mathcal{F})|U \to gl_q$ を

$$A_s(\partial/\partial y|y) = g(y)^{-1} dg(\partial/\partial y)|g(y)$$

によって定めると,

$$A_s^*(\tau_i) = ds^* \circ k(\theta^b)(\tau_i \otimes 1)$$
$$= ds^* \circ k(\theta^b)(\bar{y}_i) \qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F})$$
$$= ds_r^* \circ k(\theta^b)(\bar{y}_i)$$

と成る。　したがって

$$h_i = A_s^*(\tau_i) \qquad\qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F})$$

がいえる。

$\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha=1}^{d}$ を $\mathcal{F}$ の局所葉層座標近傍による M の有限開被覆とし，$P_\alpha = P|U_\alpha$ とおく。　Riemann計量 s_r の U_α 上への制限を $s_{r,\alpha} : U_\alpha \to P_\alpha/O_q$ とかく。　これらは局所正規直交 q－枠場 $s_\alpha : U_\alpha \to P_\alpha$ にもち上げられる。　一般に $\{t_\alpha : U_\alpha \to P_\alpha\}$ を可測局所 q－枠場の集合とするとき，可測関数 $O_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to O_q$ が存在し，

$$t_\alpha(x) O_{\alpha\beta}(x) = t_\beta(x) \qquad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

と成るならば，$\{t_\alpha\}$ は O_q-<u>関係にある</u>という。　ρ を $GL(q;\mathbb{R})$ 上の左不変Riemann計量で同時に O_q の右作用で不変なものとする。　ρ は対称空間 $S_q = GL(q;\mathbb{R})/O_q$ 上のRiemann計量 $\bar{\rho}$ を引きおこす。　また s_r は C^2－同形写像 $\bar{T}$: $P/O_q \cong M \times S_q$ を定める。

P/O_q の断面写像 s に対して

$$\|s\| = \operatorname*{ess\cdot sup}_{x \in M} \bar{\rho}(\bar{T} \circ s(x), \bar{id})$$

と定めると，これは半ノルムとなる。 gl_q－値可測 p 次形式 $\omega: \Lambda^p(T(M)) \to gl_q$ に対し，そのノルム，半ノルムが

$$\|\omega\| = \operatorname*{ess\cdot sup}_{\substack{x \in M \\ v \in \Lambda^p(T_x(M)) \\ |v|_x = 1}} \|\omega(v)\|,$$

$$\|\omega\|_{\mathcal{F}} = \operatorname*{ess\cdot sup}_{\substack{x \in M \\ v \in \Lambda^p(T_x(\mathcal{F})) \\ |v|_x = 1}} \|\omega(v)\|$$

によって定められる。

$(M, \mathcal{F})$ における可測飽和集合族の Σ－代数を $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ とかき，$\{\lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ を $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ に従属する1の分割とする。積分の dominated convergence 定理を使い，O_q－関係にある局所 C^2 q－枠場の列 $\{s_{\alpha,j}\}_{j=1,2,\cdots}$ をえらび，殆んどすべての $x \in U_\alpha$ に対して $\lim_{j\to\infty} s_{\alpha,j}(x) = s_\alpha(x)$ となるようにすることによって次の定理を得る。

定理1　葉方向に C^2 であるような O_q－関係にある局所可測 q－枠場の集合を $\{s_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ とするとき，$\|s_\alpha\| < \infty$，$\|A_{s_\alpha}\|_{\mathcal{F}} < \infty$ ならば，$[\varphi] \in H^{n-2i+1}(M, \mathcal{F})$，$B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ に対して

$$\chi_B(y_i)[\varphi] = \sum_{\alpha=1}^{d} \int_{B \cap U_\alpha} \lambda_\alpha A^*_{s_\alpha}(\tau_i) \wedge \varphi$$

が定まる。

τ_i は O_q－基底形式であるから，右辺は $\{s_\alpha\}$，$\{\lambda_\alpha\}$ のとり方

によらない。

§3. 2次特性類の消滅定理

局所葉層座標近傍族 $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha=1}^{d}$ に対し，$T_\alpha \subset U_\alpha$ を葉に横断的な q 次元座標部分多様体で，$T_\alpha \cap T_\beta = \phi$ $(\alpha \neq \beta)$ となるようにとり，$T = \bigcup_\alpha T_\alpha$ とおく。$x \in M$ を通る $\mathcal{F}$ の葉を L_x とかく。$T \times T$ の部分空間

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in T \times T \mid L_x = L_y\}$$

は主亜群構造をもち，T 上の同値関係を定める。$\mathcal{R}_x = \{y \in T \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$ とおく。一般に G を完備可分距離空間の位相群とする。$\mathcal{R}$ 上の可測 G-コサイクルは可測写像 $\psi : \mathcal{R} \to G$ で，

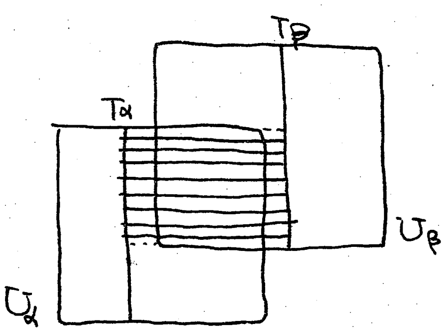
$$\psi(y, z)\,\psi(x, y) = \psi(x, z), \quad x \in T, \quad y, z \in \mathcal{R}_x$$

となるものである。二つの G-コサイクル ψ_1，ψ_2 は，可測写像 $f : T \to G$ が存在し，

$$\psi_1(x, y) = f(y)^{-1}\,\psi_2(x, y)\,f(x) \qquad (x, y) \in \mathcal{R}$$

となるとき，コホモローグであるといい，$\psi_1 \sim \psi_2$ とかく。

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ のとき $\gamma_{\alpha\beta}$ を $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ によって定められる T_α の開集合から T_β の開集合の上への局所 C^2-同形写像



とする。 局所 C^2－同形写像族 $\{\gamma_{\alpha\beta} \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi\}$ は擬群 $\mathcal{A}$ $= \mathcal{A}(\mathcal{F})$ を定める。 一般に $\mathcal{A}$ の元は（或る α, β に対し）T_α の開集合から T_β の開集合の上への局所 C^2－同形写像である。

x, $y \in R$ に対し，$\{(\alpha_i, \beta_i) \mid U_{\alpha_i} \cap U_{\beta_i} \neq \phi,\ 1 \leqq i \leqq N\}$ が存在して

$$y = \gamma_{\beta_N, \alpha_N} \circ \cdots \circ \gamma_{\beta_1, \alpha_1}(x)$$

となるとき $|(x, y)| \leqq N$ と定める。 このとき $|(x, y)|$ はノルムとなり R 上の距離（諸距離）d を定める。 R 上の G－コサイクル ψ に対し，連続関数 $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ が存在して，

$$|\psi(x, y)| \leqq c(d(x, y))$$

となるとき，ψ を軟化（tempered）コサイクルと呼ぶ。 とくに R 上の $GL(q; \mathbb{R})$－コサイクル ν が存在し，任意の $\gamma \in \mathcal{A}$ および γ の定義領域の殆んどすべての点 x に対して

$$d\gamma(x) = \nu(x, \gamma(x))$$

となる。 この ν を $d\gamma$ で表わし，R に対する法（支役）コサイクルと呼ぶ。

$tr(sl_q) = 0$ であることから，まず次のことがいえる。

定理2 $V(\mathcal{F})$ の枠束 P が主 $SL(q; \mathbb{R})$ 束に縮約（reduce）されるならば，

$$A^*_{s_\alpha}(T_i) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F})$$

となり，したがって $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ に対して，

$$\chi_B(y_i) = 0 .$$

位相群Hはコンパクト凸可分空間上のHの任意の連続アファイン作用が不動点をもつとき，柔順(amenable)であるという。 S. Hurder [H] によれば，柔順部分群 $H \subset GL(q;\mathbb{R})$ に対し，Hのリー環を $\mathfrak{h}$，その極大コンパクト部分群を $J = H \cap O_q \subset H$ とするとき，自然準同形写像

$$H^i(gl_q, H) \to H^i(\mathfrak{h}, J) \qquad i > 1$$

は0写像となる。 ただし $H^i(gl_q, H)$ は $\wedge gl_q^*$ のH－基底形式環 $(\wedge gl_q^*)_H$ の i 次元コホモロジーを表わすものとする。 $H^i(\mathfrak{h}, J)$ についても同様。 このことと定理1から次のことがいえる。

定理3 $\psi: \mathcal{R} \to GL(q;\mathbb{R})$ が軟化コサイクルで，$\psi \sim d\gamma$ となり，Pが主柔順群束に縮約されるならば，$i > 1$ に対して $A^*_{s\alpha}(T_i) \in \mathrm{Im}(d_{\mathcal{F}})$ となり，したがって

$$\chi_B(y_i) = 0 .$$

Kをコンパクト凸空間とし，ψをKのアファイン自己同形写像全体の群 Aut K に値をもつ $\mathcal{R}$ 上のコサイクルとする。任意のこのようなコサイクルψに対して，不変断面写像，すなわち可測写像 $h: T \to K$ で

$$\psi(x,y)\, h(x) = h(y) \qquad \forall (x,y) \in \mathcal{R}$$

となるものが存在するならば，$\mathcal{R}$ は柔順であるという。 集

合$X \subset T$は$x \in X$ならば$\mathcal{R}_x \subset X$となるとき，飽和(saturated)であるという。 Tの可測飽和部分集合族のΣ－代数を$\mathcal{B}(\mathcal{R})$とかく。 可測飽和部分集合Aは，二つの正測度をもつ互に素な飽和集合の和に分解できないとき，エルゴード的であるという。 とくにTがそれ自身エルゴード的飽和集合であるとき，$\mathcal{R}$はエルゴード的であるという。

$GL(q;\mathbb{R})$の2^q個の極大柔順部分群の共役類に関するC. C. Moore [M]の結果に対応して，次のことがいえる： ψを柔順エルゴード的関係$\mathcal{R}$上の$GL(q;\mathbb{R})$－コサイクルとするとき，ψは柔順部分群$H \subset GL(q;\mathbb{R})$に値をもつ軟化コサイクルにコホモローグとなり，$\mathcal{R}$がエルゴード的でない場合，$T$は高々$2^q$個の$Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ $i=1,\cdots,m$に分解し，$\psi|Y_i$は柔順部分群$H_i \subset GL(q;\mathbb{R})$に値をもつ軟化コサイクルにコホモローグとなる。（S. Hurder とA. Katok [HK, 22]参照。）このことと定理1，3とから次の結論がいえる。

定理4 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$で$\mathcal{F}|B$が柔順（すなわち$\mathcal{R}$が柔順）ならば，$y \in H^p(gl_q, O_q)$ $p>1$に対して

$$\chi_B(y) = 0 .$$

関係形のMurray-von Neumann分類（J. Feldman とC. C. Moore [FM]参照）によれば，各$B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$は（測度0の集合を除いて）一意的にそれぞれ$\mathcal{F}$がI，IIおよびIII形となる

ような可測飽和集合の和

$$B = B_{\mathrm{I}} \cup B_{\mathrm{II}} \cup B_{\mathrm{III}}$$

に分解する。 その中で $\mathcal{F}|B_{\mathrm{I}}$ は可測断面写像をもち，したがって $B_{\mathrm{I}}/\mathcal{F}$ は標準Borel測度空間となる。 すなわち可測横断多様体 T が存在し，$B_{\mathrm{I}}/\mathcal{F}$ の上へ一対一に写される。 定理4から次のことがいえる。

定理5 $\mathcal{F}|B$ がI形ならば柔順であり，したがって任意の $y \in H^p(\mathfrak{gl}_q, O_q)$ $p>1$ に対して

$$\chi_B(y) = 0.$$

$B/\mathcal{F}$ の測度は B 上の絶対連続不変横断測度を引きおこすから，$d\gamma$ は $SL(q;\mathbb{R})$ に値をもつコサイクルにコホモローグとなり，定理2から，

$$\chi_B(y_1) = 0.$$

以上により次の結論を得る。

定理6 $\mathcal{F}$ がI形ならば，すべての次元差的(residual)な2次特性類 $y_I c_J$ $(|J|=q)$ は0となる。

§4. 葉層ホロノミー亜群コホモロジーと高次元Weilコホモロジー類

$(M, \mathcal{F})$ を C^2-葉層多様体とする。 γ を $\mathcal{F}$ の一つの葉上の点 x，y を結ぶ区分的 C^2-曲線弧とし，$[\gamma]$ を γ のホロノミー

同値類とする。 $\mathcal{F}$のホロノミー亜群は，$\mathcal{F}$の葉をLと表わすとき，

$$G=G(\mathcal{F})=\bigcup_{\mathcal{F}\ni L}\{(x,y,[\gamma])\mid x,y\in L,\ \gamma:[0,1]\to L,\ \gamma(0)=x,\gamma(1)=y\}$$

によって定義される。 Gは（必ずしもHausdorffとは限らない）$2n-q$次元C^2-多様体となる。 したがってGは一つの位相亜群である。 $\mathfrak{N}G=\bigcup_{0\leqq n}\mathfrak{N}_nG$を$G$の半単体的空間とする。 すなわち，

$$\mathfrak{N}_0G=M,$$

$$\mathfrak{N}_nG=\{x_0\xrightarrow{f_1}x_1\xrightarrow{f_2}\cdots\xrightarrow{f_n}x_n\mid x_i\in M,\ f_i=(x_i,x_{i-1},[\gamma_i])\in G\}$$

$$n>0$$

で，$\mathfrak{N}_0G$はMの位相，$\mathfrak{N}_nG$は$G\times\cdots\times G$の部分空間位相をもつものであり，写像

$$\partial_i:\ \mathfrak{N}_nG\to\mathfrak{N}_{n-1}G$$

$$s_i:\ \mathfrak{N}_nG\to\mathfrak{N}_{n+1}G\qquad(0\leqq i\leqq n)$$

が定義され，

$$\partial_i\partial_j=\partial_{j-1}\partial_i\qquad(i<j),$$

$$s_is_j=s_{j+1}s_i\qquad(i\leqq j),$$

$$\partial_is_j=s_{j-1}\partial_i\qquad(i<j),$$

$$\partial_is_j=s_j\partial_{i-1}\qquad(i>j+1),$$

$$\partial_is_i=\partial_{i+1}s_i=id$$

となるものである。

$(M, \mathcal{F})$, $(M', \mathcal{F}')$ を余次元 q の C^2-葉層構造, $f_0, f_1 : M \to M'$ を $\mathcal{F}'$ に横断的な C^2-写像で,

$$f_0^*\mathcal{F}' = f_1^*\mathcal{F}' = \mathcal{F}$$

となるものとする。 $\mathcal{F}'$ に横断的な C^2-写像 $H : M \times \mathbb{R} \to M'$ が存在し,

$$f_i(m) = H(m, i) \qquad m \in M, \quad i = 0, 1$$

$$H^*\mathcal{F}' = \pi^*\mathcal{F}$$

$$(\pi : M \times \mathbb{R} \to M \text{ は射影写像})$$

となるならば, f_0, f_1 は<u>葉を保つ写像によって</u> <u>C^2-ホモトープ</u>であるといい, $f_0 \underset{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}{\simeq} f_1$ とかく。 余次元 q の葉層構造 $(M, \mathcal{F})$ は, $\mathcal{F}$ に横断的な q 次元部分多様体 $N \subset M$ と, $\mathcal{F}$ に横断的な写像 $f : M \to N \subset M$ が存在し,

$$f \underset{\mathcal{F}, \mathcal{F}}{\simeq} id_M$$

となるならば, $\mathcal{F}$-<u>可縮</u>であるという。 N を M の $\mathcal{F}$-<u>可縮部分多様体</u>とよぶ。 M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ は, $\mathcal{U}$ の任意の有限個の交わりが $\mathcal{F}$-可縮ならば, $\mathcal{F}$-<u>単純被覆</u>という。

θ^F, θ^V をそれぞれ $F = T(\mathcal{F})$, $V = V(\mathcal{F})$ の接続とする。 $T(M) = F \oplus V$ における接続 $\theta^F \oplus \theta^V$ を使うことによって, M の任意の開被覆が開集合族による $\mathcal{F}$-単純な細分をもつことがいえる。 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ を $(M, \mathcal{F})$ の局所葉層座標近傍による M の $\mathcal{F}$-単純開被覆とする。 有限部分集合 $s \subset \Sigma$ に対

して

$$U_s = \bigcap_{\alpha \in s} U_\alpha \ ,$$

$$R_{\mathfrak{U}} = \{U_s\}_{s \subset \Sigma}$$

とおく。$\mathfrak{U}$の$\mathcal{F}$-単純性によって，各U_s（U_α）の中に連結葉とただ一点で交わる横断的なq次元部分多様体N_s（N_α）と$\mathcal{F}$-可縮写像$r_s : U_s \to N_s$を見出すことができる。

$\mathfrak{U}$に対応して位相カテゴリ$M_{\mathfrak{U}}$が，その対象および射を

$$\{(x, U_s) \mid s \subset \Sigma,\ x \in U_s\} \subset M \times R_{\mathfrak{U}} \ ;$$

$$\{[(x, U_s) \to (y, U_t)] \mid s \subset t \subset \Sigma\}$$

$$\subset \{(x, U_s) \mid s \subset \Sigma,\ x \in U_s\} \times \{(x, U_s) \mid s \in \Sigma,\ x \in U_s\}$$

（共に部分空間の位相）と定めることによって得られる。

関手 $P_{\mathfrak{U}} : M_{\mathfrak{U}} \to G(\mathcal{F})$ を

$$P_{\mathfrak{U}}((x, U_s)) = x \ ,$$

$$P_{\mathfrak{U}}([(x, U_s) \to (y, U_t)]) = (x, y, [\gamma])$$

$$y = r_t(x)$$

$$\gamma : [0, 1] \to L_x \cap U_t \qquad (C^2\text{-曲線})$$

$$\gamma(0) = x, \qquad \gamma(1) = y$$

によって定める。実際$L_x \cap U_t$は可縮だから，γはx，yによってホモトピーを除いてきまる。$\mathfrak{N}(M_{\mathfrak{U}})$を$M_{\mathfrak{U}}$の脈体とする。これは半単体的集合で，$P_{\mathfrak{U}}$は半単体的写像

$$\mathfrak{N}(P_{\mathfrak{U}}) : \mathfrak{N}(M_{\mathfrak{U}}) \to \mathfrak{N}(G(\mathcal{F}))$$

を引きおこす。

$\mathfrak{N}(M\mathfrak{U})$ の各 n－単体は

$$(x,\ i_0,\dots,i_n) = (x,\ U_{i_0,\dots,i_n},\ U_{i_1,\dots,i_n},\ \dots,\ U_{i_n})$$

$$x \in N_{i_0,\dots,i_n} \subset U_{i_0,\dots,i_n}$$

の形をもつ。 x に関して C^2-関数となる $\mathfrak{N}(M\mathfrak{U})$ 上の実数値コチェインの群を $\hat{C}^{\cdot}(\mathfrak{N}(M\mathfrak{U}))$ とかくと，

$$\mathfrak{N}(P\mathfrak{U})^{\#}(C^{\cdot}(G(\mathcal{F}) : \mathbb{R})) \subset \hat{C}^{\cdot}(\mathfrak{N}(M\mathfrak{U}))$$

および自然同形写像

$$\lambda :\ \hat{C}^{\cdot}(\mathfrak{N}(M\mathfrak{U})) \cong C^{\cdot}(\mathfrak{N}(R\mathfrak{U}) : C^2_{\mathcal{F}})$$

が得られる。 ここで $C^2_{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}$ の葉に沿って一定な値をとる C^2-関数の芽の層とする。 単体の重心細分作用素から，コチェイン写像 $K :\ C^{\cdot}(\mathfrak{N}(R\mathfrak{U});\ C^2_{\mathcal{F}}) \to C^{\cdot}(\mathfrak{N}(\mathfrak{U});\ C^2_{\mathcal{F}})$ が

$$(Kf)_{i_0,\dots,i_n}(x) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, f(x,\ \sigma(i_0),\ \dots,\ \sigma(i_n))$$

$$x \in U_{i_0,\dots,i_n}, \qquad f \in C^n(\mathfrak{N}(R\mathfrak{U});\ C^2_{\mathcal{F}})$$

によって定められ，同形写像

$$K^{\cdot} :\ H^{\cdot}(\mathfrak{N}(R\mathfrak{U});\ C^2_{\mathcal{F}}) \cong H^{\cdot}(\mathfrak{N}(\mathfrak{U});\ C^2_{\mathcal{F}}) = \check{H}^{\cdot}(\mathfrak{U};\ C^2_{\mathcal{F}})$$

を引きおこす。 以上により $K \circ \lambda \circ \mathfrak{N}(P\mathfrak{U})^{\#}$ は準同形写像，

$$\Theta :\ H^{\cdot}(G(\mathcal{F});\ \mathbb{R}) \to \check{H}^{\cdot}(M;\ C^2_{\mathcal{F}})$$

を定める。 この Θ が同形となる場合，鈴木 [S1] の方法による同形写像

$$\Phi : H^{0,\cdot}_{\mathcal{F}DR}(M) \xrightarrow{\cong} \check{H}^{\cdot}(M; \mathcal{C}^{2}_{\mathcal{F}})$$

と合わせて，Weilコホモロジー類$[(h_i)_{0,2i-1}]$に対応する$H^{2i-1}(G(\mathcal{F}); \mathbb{R})$の元

$$m_i(M, \mathcal{F}) = \Theta^{-1} \circ \Phi[(h_i)_{0,2i-1}]$$

を定めることができる。 とくに $i = 1$ に対しては，モジュライ・コホモロジー類 $m_1(M, \mathcal{F}) = m(M, \mathcal{F})$ が得られる。（鈴木［S_2］参照。）

参考文献

[FM] J. Feldman and C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I, Trans. Amer. Math. Soc. 234(1977), 289 - 324.

[G] C. Godbillon, Cohomologie d'algebres de Lie de champs de vecteurs formels, Seminaire Bourbaki 421.01 - 421.19 (1971/72).

[H] S. Hurder, Foliation dynamics and leaf invariants, Comment. Math. Helvetici 60(1985), 319 - 335.

[HH] J. L. Heitsch and S. Hurder, Secondary classes, Weil measures and the geometry of foliations, J. Differential Geometry 4(1984), 291 - 309.

[HK] S. Hurder and A. Katok, Ergodic theory and Weil measures for foliations, Math. Sci. Res. Inst. preprint, 1984.

[KT] F. Kamber and Ph. Tondeur,Foliated bundles and characteristic classes, Lecture Notes in Math. 493, Sprînger-Verlag, Berlin 1976.

[M] C. C. Moore, Amenable subgroups of semi-simple groups and proximal flows, Israel J. of Math. 34(1979), 121 - 138.

[S_1] H. Suzuki, An interpretation of Weil operator $\chi(y_1)$, Research Notes in Math. 131, Ed. L. A. Cordero, Differential Geometry, Pitman 1985, 228 - 244.

[S_2] H. Suzuki, Modular cohomology class from the viewpoint of characteristic class, Research Notes in Math. 123, Ed. H. Araki and E. G. Effros, Geometric Methods in Operator Algebras, Pitman 1986, 375 - 386.